Analysis 1 : Kugelstoßen

Kugelstoßen - Aufgaben

Abbildung 1 zeigt schematisch drei Bahnen, auf denen sich eine Kugel beim Kugelstoßen bewegen kann. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m in der Realität; die x-Achse beschreibt den horizontal verlaufenden Boden. Die Kugel soll als punktförmig angenommen werden.

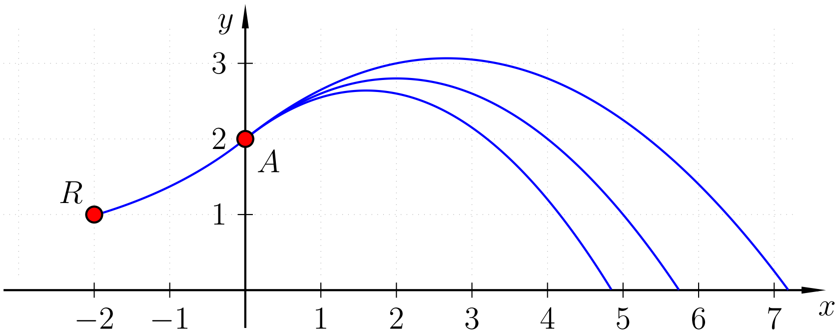

Abbildung 1: Flugbahn

Die Kugel wird aus der Ruhelage (R) beschleunigt, bis sie im Abstoßpunkt (A) die Hand der Athletin verlässt. Die anschließende Flugkurve der Kugel ist abhängig von ihrer Geschwindigkeit beim Abstoßen. Damit verändert sich insbesondere die Stoßweite, d. h. der Abstand zwischen dem Punkt $(0|0)$ und dem Auftreffpunkt auf dem Boden.

Die Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt kann modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0.4 + 1.6 \cdot e^{0.5x} \quad \textit{und} \quad x \in [-2; 0]$$

beschrieben werden.

1. *Funktion f*

   (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{RA}$ mit $R(-2|f(-2))$, die näherungsweise der Länge der Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt entspricht.

   (2 P)

   (b) Berechnen Sie den Abstand der Kugel von der zur y-Achse parallelen Gerade durch R, wenn sie sich in der Hand der Athletin 1.50 m über dem Boden befindet.

   (4 P)

   (c) Während eines Stoßes wurde die Höhe der Kugel über dem Boden an fünf Stellen gemessen. Die fünf Stellen werden im Modell durch die x-Werte x_1 bis x_5 dargestellt, die gemessenen Höhen werden mit h_1 bis h_5 bezeichnet.
   Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Wenn der Wert des Terms

$$\left|\sum_{i=1}^{5} \left(h_i - f(x_i)\right)\right|$$

klein ist, dann werden die gemessenen Höhen durch die Werte, die das Modell liefert, gut beschrieben.

(3 P)

Lösung

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und Lösung bzw. $\boxed{Ctrl}$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Funktionenschar p_a*

Nach dem Abstoßen der Kugel lässt sich jede mögliche Flugkurve mithilfe einer der Funktionen p_a mit

$$p_a(x) = -ax^2 + bx + 2 \quad \textit{und} \quad a > 0$$

beschreiben. Alle möglichen Bahnen der Kugel weisen im Abstoßpunkt A keinen Knick auf.

(a) Ermitteln Sie den Wert von b.

(4 P)

Verwenden Sie im Folgenden p_a mit

$$p_a(x) = -ax^2 + 0.8x + 2.$$

(b) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph von p_a durch den Punkt $(3|3.5)$ verläuft.

(2 P)

(c) Bei der Flugkurve zu $a = 0.1$ beträgt die Stoßweite 10 m. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Kugel auf den Boden auftrifft.

(3 P)

(d) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{0.4}{a}\middle|2 + \frac{0.16}{a}\right)$ der einzige Hochpunkt des Graphen von p_a ist.

(4 P)

(e) Weisen Sie nach, dass die Hochpunkte aller Graphen von p_a auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

(3 P)

Lösung

3. *Parameter a*

Der Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s mit $s > 0$ lässt sich durch die Gleichung

$$a = \frac{0.8}{s} + \frac{2}{s^2}$$

darstellen.

(a) Leiten Sie diese Gleichung her.

(3 P)

(b) Bei einem Stoß beträgt die Stoßweite 20 m. Berechnen Sie die größte Höhe über dem Boden, die die Kugel bei diesem Stoß erreicht.

(4 P)

Lösung

4. *Funktion g*

Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion g mit

$$g(s) = \frac{0.8}{s} + \frac{2}{s^2} \quad \textit{mit} \quad s > 0$$

(a) Geben Sie eine Stammfunktion von g an.

(2 P)

(b) Zeichnen Sie in Abbildung 2 die beiden Parallelen zur s-Achse ein, die durch die Punkte des Graphen mit den s-Koordinaten 2 bzw. 10 verlaufen.

(2 P)

(c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph mit der y-Achse und den beiden eingezeichneten Parallelen einschließt.

(4 P)

Lösung

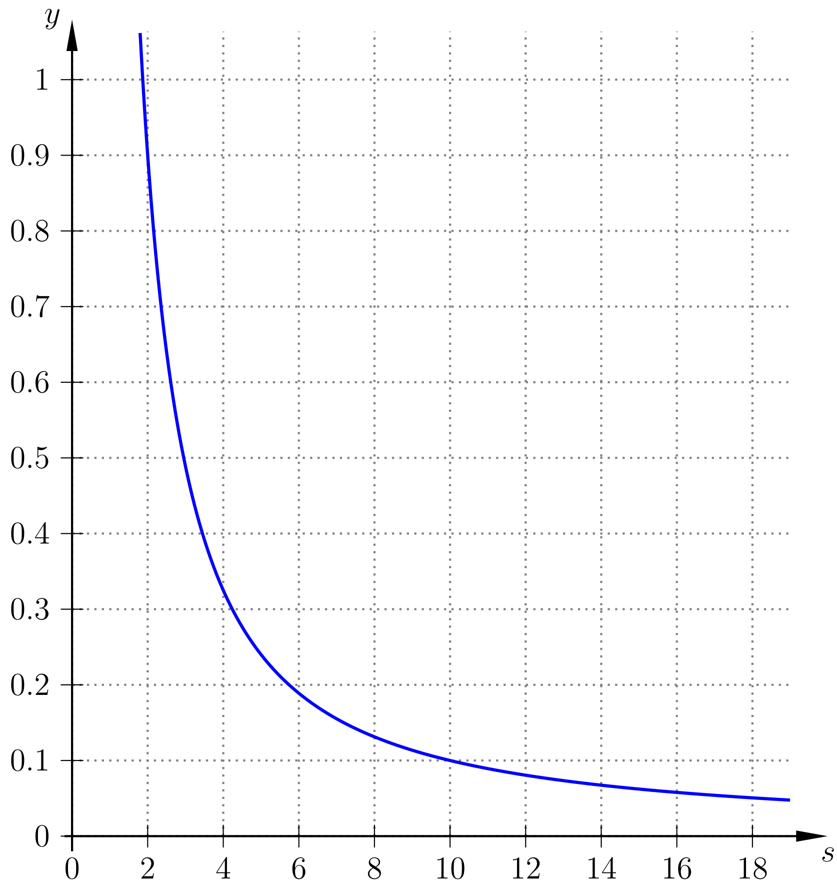

Abbildung 2: Stoßweiten