Analysis : Hängebrücke

1 Hängebrücke - Aufgaben

Zwischen zwei Orten A und B befindet sich ein Tal mit einem tiefsten Punkt T. Der Querschnitt des Tals kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben werden, wobei $f(x)$ die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern angibt. Im dargestellten Koordinatensystem entspricht eine Einheit einem Kilometer in der Wirklichkeit. Die Orte A und B sowie der Tiefpunkt T haben die Koordinaten $A(0|0.2)$, $B(1|0.3)$ und $T(0.5|0.13)$ (vgl. Abbildung 1).

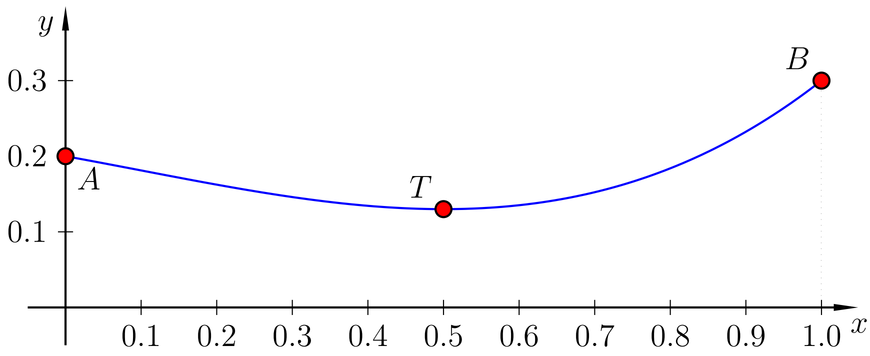

Abbildung 1: Tal

Der Graph der Funktion f ist zusätzlich auf dem *Beiblatt* (Abbildung 2) vergrößert dargestellt.

1. *Funktion f*

   (a) Leiten Sie eine Gleichung der Funktion f her.

   (5 P)

   Verwenden Sie im Folgenden

   $$f(x) = 0.4x^3 - 0.12x^2 - 0.18x + 0.2$$

   (b) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Querschnitt des Tals eine Höhe von 240 m über dem Meeresspiegel aufweist, und bestimmen Sie die Steigung an dieser Stelle.

   (2 P)

   (c) Eine Person wandert von A nach T. Bestimmen Sie das durchschnittliche und das maximale Gefälle auf diesem Weg.

   (7 P)

   Lösung

   Hinweis:
   Mit gleichzeitigem Drücken von Strg und Lösung bzw. Ctrl und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Funktion g*

   Als Touristenattraktion soll zwischen den Punkten A und B eine Hängebrücke errichtet werden. Der Verlauf der Hängebrücke kann durch den Graphen einer Funktion g mit

   $$g(x) = 0.2x^2 - 0.1x + 0.2$$

   beschrieben werden.

   (a) Ergänzen Sie die auf dem Beiblatt abgedruckte Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen auf das *Beiblatt* .

   (4 P)

   (b) Berechnen Sie den Winkel α zwischen dem Verlauf der Hängebrücke und dem Querschnitt des Tals im Punkt B.

   (3 P)

   Lösung

3. *Hängebrücke*

   (a) Es gibt Punkte auf der Hängebrücke, deren Höhe über dem Boden 50 m beträgt. Zeichnen Sie diese Punkte auf dem *Beiblatt* ein.

   (2 P)

   (b) Ermitteln Sie rechnerisch die größte Höhe der Hängebrücke über dem Boden.

   (5 P)

   Die Länge L des Graphen der Funktion g über dem Intervall $[a; b]$ kann durch

   $$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2} dx$$

   berechnet werden.

   (c) Berechnen Sie die Länge der Hängebrücke.

   (2 P)

(d) Begründen Sie, dass

$$\int_0^b \sqrt{1+\left(g'(x)\right)^2}dx > \sqrt{b^2+\left(g(b)-g(0)\right)^2} \quad \textit{für alle} \quad 0 < b \leq 1$$

gilt.

(3 P)

Lösung

4. *Funktion h*

Auch die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$$

kann zur Beschreibung von Hängebrücken verwendet werden.

Es gilt

$$h''(x) = h(x).$$

(a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass

$$\left(h(x)\right)^2 - \left(h'(x)\right)^2 = 1$$

gilt.

(4 P)

(b) Leiten Sie her, dass

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(h'(x)\right)^2}dx = h'(b) - h'(a)$$

ist.

(3 P)

Lösung

1.1 Beiblatt

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$g(x)$		0.192								0.272	

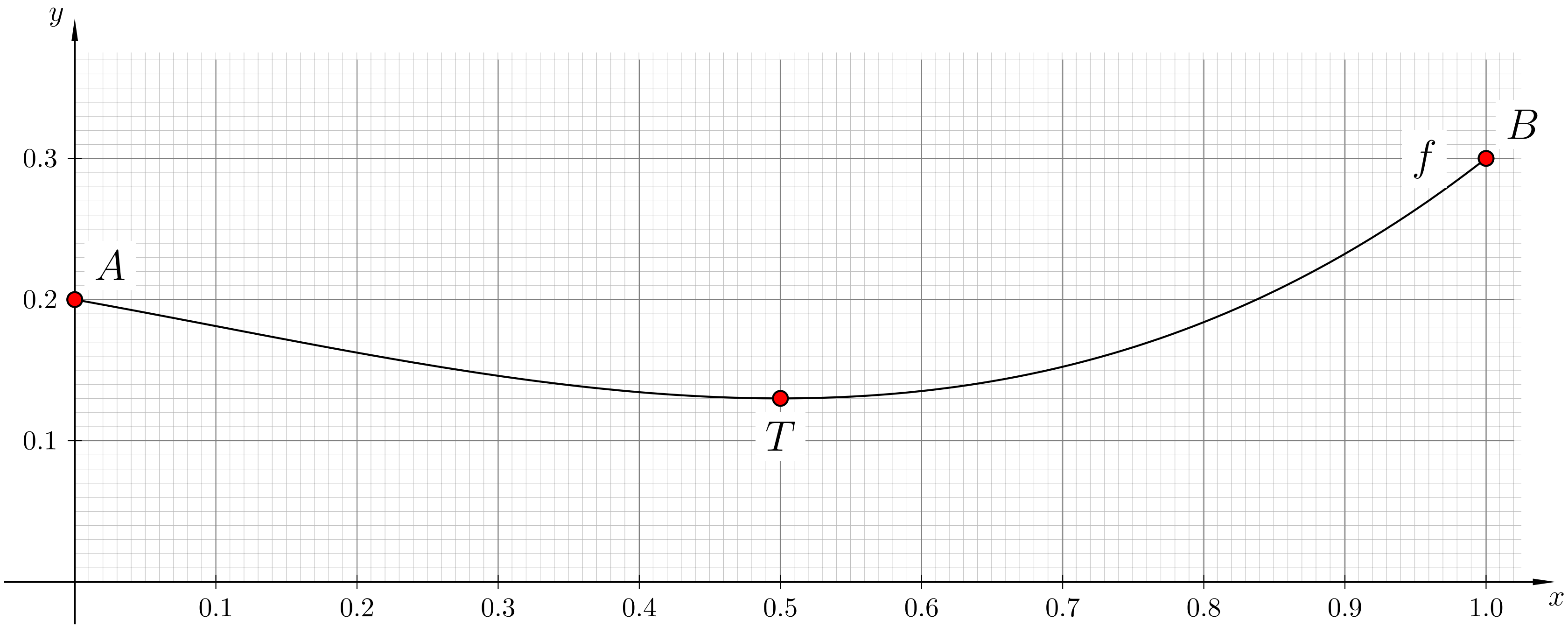

Abbildung 2: Tal mit Raster