Analysis : Funktionsuntersuchungen

1 Funktionsuntersuchungen - Aufgaben

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat den Tiefpunkt $(0|0)$ und den Wendepunkt $\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{5}{4}\right)$.

Runden Sie im Folgenden alle Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

1. *Funktion g*

   (a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

   (5 P)

   $\left[ZurKontrolle: \ g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x+3)\right]$

   (b) Erstellen Sie für $-1.5 \leq x \leq 0.5$ eine Wertetabelle für die Funktion g mit der Schrittweite 0.25 und zeichnen Sie den Graphen.

   (4 P)

   (c) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt (die sogenannte Wendetangente). Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

   (3 P)

   (d) Zeigen Sie, dass die Wendetangente von g und der Graph von g nur den Wendepunkt gemeinsam haben.

   (3 P)

   Lösung

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und *Lösung* bzw. $\boxed{Ctrl}$ und *Lösung* wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Funktion h*
   Die Abbildung 4 zeigt den Graphen der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit

$$h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}.$$

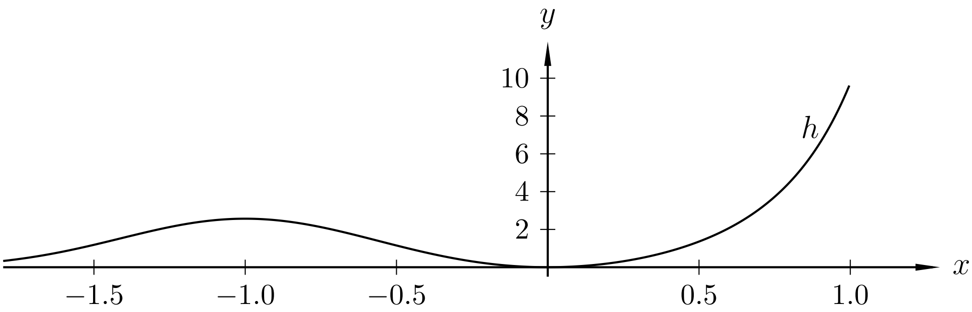

Abb. 1: e-Funktion

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion h keine negativen Funktionswerte hat.

(2 P)

(b) Zeigen Sie, dass

$$h'(x) = 10x \cdot \left(1 + x^3\right) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$$

ein Term der 1. Ableitungsfunktion von h ist.

(2 P)

(c) Die x-Achse ist eine waagerechte Tangente an den Graphen von h.
Weisen Sie nach, dass neben der x-Achse die Gerade t mit

$$t(x) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}}$$

die einzig weitere waagerechte Tangente an den Graphen von h ist.

(4 P)

(d) Die Tangente t und der Graph von h haben genau zwei Punkte gemeinsam. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Tangente t und dem Graphen von h vollständig eingeschlossen wird.

(4 P)

Lösung

3. *Vergleich der Funktionen g und h*

   (a) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen g von der mittleren Steigung des Graphen h im Bereich $-1 \leq x \leq 0$.

   (3 P)

   (b) Es gilt

   $$\Big(h(1) - g(1)\Big) \cdot \Big(h(2) - g(2)\Big) < 0$$

   Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

   (4 P)

Lösung

4. *Abbildungen*

   (a) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung 4 die folgende Aussage:

   "Für $-1.5 \leq x \leq 1$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion von h genau einmal das Krümmungsverhalten."

   (3 P)

   (b) Eine der in den Abbildungen abgebildeten Graphen I, II oder III ist der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion H mit

   $$H(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

   Entscheiden Sie, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

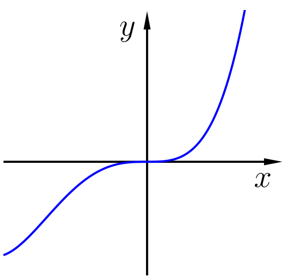

Abb. 2: Graph I

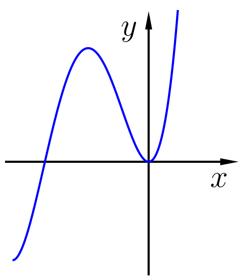

Abb. 3: Graph II

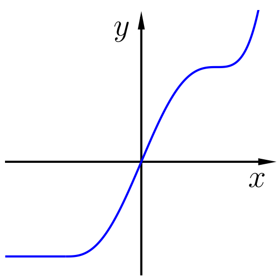

Abb. 4: Graph III

(3 P)

Lösung