

Analysis-CAS : Koffein

1 Koffein - Aufgaben

Trinkt man ein koffeinhaltiges Getränk (z. B. Kaffee, Cola, Energiedrink), so wird darin enthaltenes Koffein vom Körper ins Blut aufgenommen und dort kontinuierlich wieder abgebaut.

1. Funktion h

Eine Person, in deren Körper kein Koffein enthalten ist, trinkt ein koffeinhaltiges Getränk. Berücksichtigt man sowohl den Aufnahme- als auch den Abbauvorgang, so wird die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration im Blut mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit

$$h(t) = 0.01 \cdot e^{-0.003 \cdot t} \cdot (1 - e^{-0.07 \cdot t}) \quad \text{für } t \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist $h(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ und t die Zeit in Minuten, die seit dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs vergangen ist.

- (a) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die höchste Koffeinkonzentration erreicht wird, und geben Sie dieses Konzentration an.

(4 P)

- (b) Zeichnen Sie den Graphen von h über dem Intervall $[0; 400]$ in ein Koordinatensystem und wählen Sie hierfür folgenden Maßstab: 5 cm auf der t -Achse entsprechen 100 min und 1 cm auf der y -Achse entspricht $0.001 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$.

(3 P)

- (c) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Zeichnung die größte momentane Abnahmerate der Koffeinkonzentration.

(3 P)

- (d) Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Koffeinkonzentration maximal ist, und geben Sie das Maximum an.

(4 P)

- (e) Bestimmen Sie mithilfe einer Rechnung die Zeiträume ab dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs, in denen die Koffeinkonzentration höchstens $0.007 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ beträgt.

(3 P)

- (f) Berechnen Sie denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}^+$, für den der Inhalt der Fläche, die der Graph von h mit der t -Achse und der Geraden mit der Gleichung $t = a$ einschließt, 0.7 beträgt. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

"Der Inhalt der betrachteten Fläche entspricht der Koffeinemenge, die im zugehörigen Zeitraum insgesamt ins Blut aufgenommen wird."

(4 P)

[Lösung für TI-Nspire CX](#)

[Lösung für Classpad](#)

Hinweis:

Mit gleichzeitigem Drücken von `Strg` und `Lösung` bzw. `Ctrl` und `Lösung` wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. Untersuchung des Abbauvorgangs

Zur gesonderten Untersuchung des Abbauvorgangs soll nun davon ausgegangen werden, dass die Aufnahme von Koffein ins Blut bereits abgeschlossen ist und die Konzentration des Koffeins im Blut innerhalb von jeweils 240 Minuten um die Hälfte abnimmt.

- (a) Geben Sie die Zeitdauer an, innerhalb derer die Koffeinkonzentration um 75% abnimmt.

(2 P)

- (b) Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration mithilfe einer in \mathbb{R} definierten Funktion f mit

$$f(t) = c \cdot e^{a \cdot t} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R}^+$$

beschreiben. Dabei ist $f(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ und t die Zeit in Minuten, die seit Beginn der Beobachtung dieser Konzentration vergangen ist.

Begründen Sie, dass c die Koffeinkonzentration zu Beginn der Beobachtung angibt, und bestimmen Sie den passenden Wert von a .

(3 P)

[Lösung für TI-Nspire CX](#)

[Lösung für Classpad](#)

3. Untersuchung des Aufnahmevorgangs

Berücksichtigt man nun den Aufnahmevorgang, lässt also den gleichzeitig erfolgenden Abbau von Koffein außer Acht, so kann die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration mithilfe einer in \mathbb{R} definierten Funktion $g_{b;k}$ mit

$$g_{b;k}(t) = k \cdot (1 - e^{bt}) \quad \text{mit } b \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben werden. Dabei ist $g_{b;k}$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ und t die Zeit in Minuten, die seit Beginn der Beobachtung dieser Konzentration vergangen ist.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die Blutmenge konstant 5 Liter beträgt und insgesamt 100 mg Koffein ins Blut aufgenommen werden.

(a) Begründen Sie unter Berücksichtigung des Sachzusammenhangs, dass $b < 0$ gilt.

(2 P)

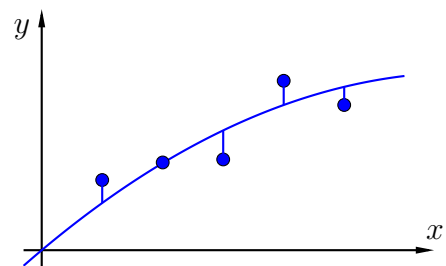
(b) Geben Sie die Bedeutung von k im Sachzusammenhang an und zeigen Sie, dass $k = 0.02$ gilt.

(2 P)

Der folgenden Tabelle können Koffeinkonzentrationen entnommen werden, die sich aus einer Messung ergeben, wenn man den Abbauvorgang außer Acht lässt:

seit Beginn der Beobachtung vergangene Zeit in Minuten	0	15	30	60
Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$	0	0.0127	0.0173	0.0190

Sollen Messwerte mithilfe einer Funktion eines bestimmten Funktionstyps möglichst gut beschrieben werden, so wird diese Funktion so gewählt, dass die Summe der quadrierten Differenzen der Funktionswerte und der Messwerte möglichst klein ist. In der Abbildung sind Differenzen von Funktionswerten und Messwerten beispielhaft in Form von Strecken veranschaulicht.



(c) Berechnen Sie die Summe der quadrierten Differenzen der Funktionswerte der Funktion $g_{b;k}$ mit $b = -0.07$ und $k = 0.02$ und der in der Tabelle gegebenen Messwerte.

(4 P)

(d) Geben Sie einen Grund dafür an, dass es bei dieser Methode nicht sinnvoll ist, die Differenzen selbst anstelle ihrer Quadrate zu verwenden.

(2 P)

- (e) Bestimmen Sie b so, dass die angegebenen Messwerte mithilfe der Funktion $g_{b;0.02}$ möglichst gut beschrieben werden.

(4 P)

[Lösung für TI-Nspire CX](#)

[Lösung für Classpad](#)