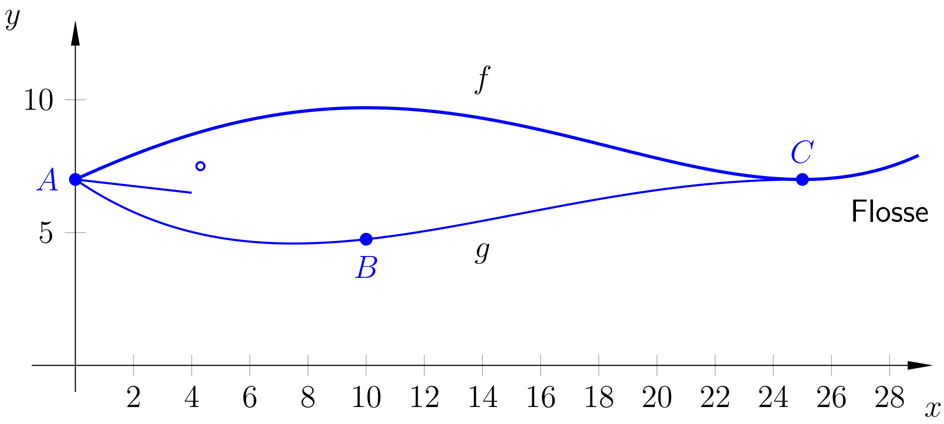
Analysis-CAS : Blauwal

1 Blauwal - Aufgaben

1. *Modell eines Blauwals*

   Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt durch das Modell eines Blauwals.Eine Längeneinheit beträgt 1 Meter in der Wirklichkeit.



   Die obere Begrenzung inklusive Flosse wird durch den Graphen der Funktion f mit

   $$f(x) \;=\; \frac{1}{25000}x^4 - \frac{3}{2500}x^3 - \frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{2}x + 7$$

   im Intervall $[0; 29]$ beschrieben.

   Die untere Begrenzung wird im Intervall $[0; 25]$ durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades modelliert. Der Graph von g verläuft durch die Punkte $A(0|7)$, $B\left(10|\frac{19}{4}\right)$ und $C(25|7)$. Seine Tangente an der Stelle $x = 7{,}5$ ist waagerecht. Im Punkt C erfolgt ein knickfreier Anschluss an den Graphen von f.

   (a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

   $$\left[\text{Zur Kontrolle:}\;\; g(x) \;=\; \frac{1}{50000}x^4 - \frac{11}{5000}x^3 + \frac{29}{400}x^2 - \frac{3}{4}x + 7\right]$$

   (7 P)

   (b) Für jedes x aus dem Intervall $[0; 25]$ wird die Dicke des Längsschnitts durch die Differenz der Funktionswerte von f und g an dieser Stelle x beschrieben.
   Berechnen Sie die maximale Dicke des Längsschnitts.

   (6 P)

   Lösung für TI-Nspire CX *Lösung für Classpad*

   Hinweis:
   Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und *Lösung* bzw. $\boxed{Ctrl}$ und *Lösung* wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Wachstum eines Blauwals*

Ein Blauwal ist bei der Geburt 6 m lang. Seine Wachstumsrate wird modelliert durch die Funktion w mit

$$w(x) \;=\; \frac{120 \cdot e^{0{,}9(x-5)}}{\left(e^{0{,}9(x-5)}+6\right)^2}$$

Dabei steht x für die Zeit in Jahren seit der Geburt und $w(x)$ für den Längenzuwachs in Meter pro Jahr.

(a) Ermitteln Sie die Körperlänge des Blauwals nacht acht Jahren.

(2 P)

(b) Zeigen Sie, dass ein Blauwal, dessen Wachstumsrate durch die Funktion w modelliert wird, immer weiter wachsen würde, aber eine Körperlänge von 29 m nie erreichen könnte.

(4 P)

(c) Ein Blauwal ist nach diesem Modell ausgewachsen, wenn er eine Körperlänge von 27,6 m erreicht hat.
Bestimmen Sie das Alter, ab dem der Blauwal ausgewachsen ist.

(3 P)

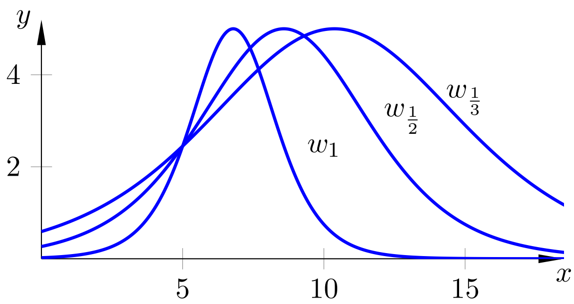
Lösung für TI-Nspire CX   *Lösung für Classpad*

3. *Funktionenschar*

Die Funktion w ist in der Schar w_k mit

$$w_k(x) \;=\; \frac{120 \cdot e^{k\cdot(x-5)}}{\left(e^{k\cdot(x-5)}+6\right)^2}$$

mit $k > 0$ enthalten.
Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen von w_1, $w_{\frac{1}{2}}$ und $w_{\frac{1}{3}}$.



(a) Beschreiben Sie anhand der dargestellten Graphen den Einfluss des Parameters k auf die Koordinaten des Hochpunktes und auf den y-Achsenabschnitt.

(3 P)

(b) Zeigen Sie, dass der Hochpunkt $P\left(5|\frac{120}{49}\right)$ für alle $k > 0$ auf dem Graphen von w_k liegt.
Weisen Sie nach, das P für kein $k > 0$ ein Wendepunkt sein kann.

(5 P)

(c) Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Hochpunkte der Graphen von w_k auf einer Geraden liegen.
Bestimmen Sie einen Wert für k, so dass w_k an der Stelle $x = 6$ ein lokales Maximum annimmt.

(6 P)

(d) Jeder Graph der Funktionsschar w_k ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $Q\left(5 + \frac{ln(6)}{k}|0\right)$. Der Punkt $P\left(5|\frac{120}{49}\right)$ besitzt somit auf jedem Funktionsgraphen einen Spiegelpunkt P_k'. Die Punkte P', Q_k und P_k' bilden die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Parameter k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks genau 1 beträgt.

(4 P)

Lösung für TI-Nspire CX   *Lösung für Classpad*