Hilfsmittelfreier Aufgabenteil

1 HMF-Aufgaben

1.1 HMF 1 - Stochastik (Pool 1)

Für ein Zufallsexperiment mit den beiden Ereignissen A und B gilt $P(A) = 0{,}6$ und $P(\overline{B}) = 0{,}3$ sowie $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}2$.

a) Erstellen Sie für die beschriebene Situation eine vollständige Vierfeldertafel.

(3 P)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_A(\overline{B})$.

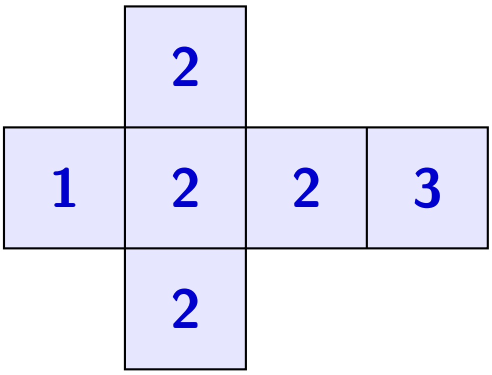
(2 P)

Lösung

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und Lösung bzw. $\boxed{Ctrl}$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

1.2 HMF 2 - Stochastik (Pool 1)

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



a) Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist.

(2 P)

b) Die Zahlen "1" und "3" werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls 1:3. Betrachtet man bei einmaligen Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4.

Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen.

(3 P)

Lösung

1.3 HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist eine Kugel K mit

$$K : (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$$

a) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r der Kugel K sowie die Koordinaten eines Punktes P auf dieser Kugel an.

(2 P)

b) Gegeben sind die Punkte $A(4|4|0)$ und $B(0|8|0)$.

Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B die Kugel K in genau einem Punkt berührt.

(3 P)

Lösung

1.4 HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt.

$M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

(2 P)

b) Unter allen Punkten auf dem Rand der Grundfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten.

Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T.

(3 P)

Lösung

1.5 HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind die Geraden g_a und h_a gegeben durch

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Geraden g_a und h_a haben den gemeinsamen Punkt $P(1|1|1)$.

a) Untersuchen Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, für das g_a und h_a sogar identisch sind.

(2 P)

b) Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, so dass g_a und h_a orthogonal zueinander sind.

(3 P)

Lösung

1.6 HMF 6 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{8}{3}x^3 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie die lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle $x = -1$.

(2 P)

b) Die Funktion f hat drei Wendestellen. Bestimmen Sie diese Stellen.

(3 P)

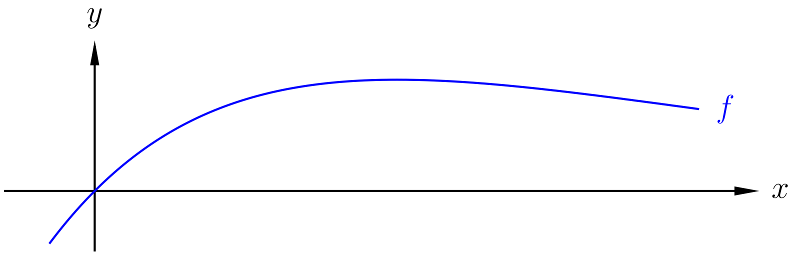
Lösung

1.7 HMF 7 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}$$

Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q\Big(a|f(a)\Big)$ mit $a > 0$.



a) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann.

(2 P)

b) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert a.

(3 P)

Lösung

1.8 HMF 8 - Analysis (Pool 2)

Für jeden Wert $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit

$$f_a(x) = a \cdot (x-2)^3 \quad \text{und } x \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit

$$F(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$$

eine Stammfunktion von f_2 ist.

(1 P)

b) Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

(4 P)

Lösung